Trigonometrie

Trainingsheft 1

Wiederholung dieser Grundlagen:

1. Sinus und Kosinus im Einheitskreis
2. Beliebige Sinus- und Kosinuswerte bestimmen
3. Einfache trigonometrische Gleichungen lösen.
4. Sinus- und Kosinuskurven zeichnen

Keine Verwendung von CAS-Rechnern !!

Datei Nr. 16012

Stand 12. Januar 2019

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Ich habe diesen Text geschrieben, weil es mir in meiner Unterrichtspraxis immer wieder aufgefallen ist, dass sich Schüler bis hinauf in die Abiturklasse mit trigonometrischen Grundlagen schwer tun. Offenbar ist der Grad der Beschäftigung damit nicht so groß, dass ein bleibender Eindruck hinterlassen wird.

Hier nun ein paar Trainingseinheiten, die helfen können, wenn man Hilfe sucht.
Ich habe den Text bewusst kurz gehalten, damit man nicht davor zurückschreckt, wenn man Hilfe sucht.

Inhalt

Eingangstest

Hier kannst du dein Wissen überprüfen und herausfinden, was du (noch) üben solltest.
Dazu hilft dir das Inhaltsverzeichnis der vorangehenden Seite.
Die Testergebnisse findest du am Ende des Textes.

Testaufgabe 1: Thema Einheitskreis

Die Punkte A und B liegen auf dem Einheitskreis.
Bestimme ihre Koordinaten und die zugehörigen Mittelpunktswinkel.

a) $A(0{,}24 \mid y_A)$ b) $B(x_B \mid -0{,}71)$

Die Punkte C und D liegen auch auf dem Einheitskreis.
Bestimme ihre Koordinaten aus dem gegebenen Mittelpunktswinkel:

c) $\gamma_C = 52{,}3^\circ$ d) $\gamma_D = 238^\circ$.

Testaufgabe 2: Einfache trigonometrische Gleichungen im Gradmaß lösen

Bestimme die Lösungen der folgenden Gleichungen im Bereich $0^\circ \le \alpha \le 360^\circ$:

a) $\sin\alpha = 0{,}16$ b) $\sin\alpha = -0{,}68$

c) $\cos\alpha = 0{,}9$ d) $\cos\alpha = -0{,}23$

Testaufgabe 3: Einfache trigonometrische Gleichungen im Bogenmaß lösen

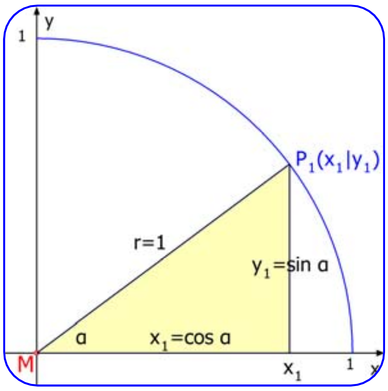
Bestimme die Lösungen der folgenden Gleichungen im angegebenen Bereich:

a) $\sin\alpha = 0{,}45$ im Intervall $[-\pi ; 3\pi]$

b) $\cos\alpha = -0{,}8245$ im Intervall $[-\pi ; \pi]$.

1. Sinus und Kosinus als Koordinaten im Einheitskreis

Spezialfall: Punkte im 1. Feld – also $0 \le \alpha \le 90^o$



Für Punkte auf dem Einheitskreis (also Radius 1) kann man mit den Formeln $\sin\alpha = \frac{\text{Gegegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} 1$, $\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$ folgendes herausfinden:

Es ist $\sin\alpha = \frac{y_1}{1}$ und $\cos\alpha = \frac{x_1}{1}$

Man hat festgelegt, dass dieses Ergebnis für alle Punkte des Einheitskreises gelten soll, egal wo sie liegen:

$\boxed{\sin\alpha = y_1 \quad \text{und} \quad \cos\alpha = x_1}$ LERNEN!!!

Folgerungen und Übungen

(1) Berechne die x-Koordinate von $A(x_A \mid 0{,}4)$, wenn A auf dem Einheitskreis liegt.

Wissen: $y_A = \boxed{0{,}4 = \sin\alpha}$. Mit dem Taschenrechner kann man daraus α berechnen. Dazu benötigt man die Umkehrfunktion, die auf Rechnern die Beschriftung $\sin^{-1}$ trägt. Also ist $\alpha \approx 23{,}58^o$. Damit kann man die gesuchte x-Koordinate von A berechnen: $x_A = \cos\alpha \approx 0{,}92$. Erg.: $A(0{,}92 \mid 0{,}4)$

```
sin⁻¹ .4
          23.578
cos Ans
          0.9165
```

Hinweis dazu: Ich habe sofort anschließend $\cos\alpha$ berechnet. Aber anstatt die Ziffern einzutippen, habe ich die Systemvariable **Ans** verwendet.
Diese enthält automatisch immer die letzte Antwort (= **Ans**wer).

Gradmaß oder Bogenmaß ???

Man sollt vor solchen Rechnungen stets überprüfen, welches Winkelmaß eingestellt ist. (Hier über Shift-Menu (=Set UP)).
Bei unserer Aufgabe wird das Gradmaß verwendet (Deg).
Wäre das Bogenmaß (Rad) eingestellt, würde der Rechner zwar immer noch den Winkel α berechnen, doch in einer für die Geometrie wenig brauchbaren Einheit (Radiant = Bogenmaß).
Die folgende x-Koordinate wäre wieder richtig.

```
Input/Output:Math
Mode        :Comp
Frac Result :d/c
Func Type   :Y=
Draw Type   :Connect
Derivative  :Off
Angle       :Deg
```

```
sin⁻¹ .4
          0.41151
cos Ans
          0.9165
```

(2) Berechne die y-Koordinate von $B(0{,}2 \mid y_B)$ auf dem Einheitskreis.

Aus $\cos\alpha = 0{,}2$ berechnet man analog zu (1) den Mittelpunktswinkel $\alpha \approx 78{,}46^o$ und daraus $y_B \approx 0{,}98$. Erg.: $B(0{,}2 \mid 0{,}98)$

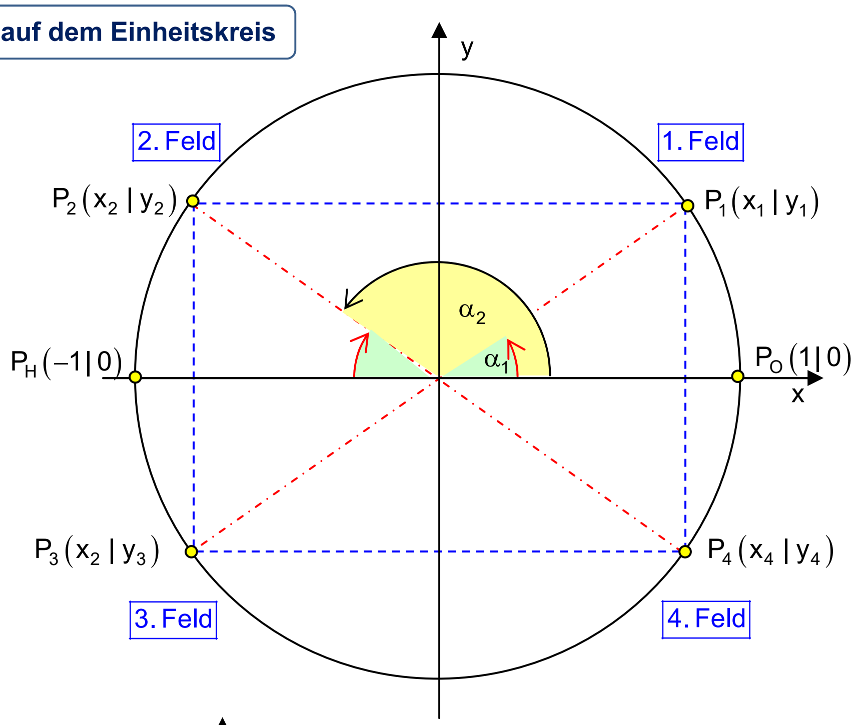
```
cos⁻¹ .2
          78.463
sin Ans
          0.97979
```

Zusatz

Vielleicht hat der Leser im Unterricht schon gelernt, dass dieser Einheitskreis die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ hat. Dies ist einfach der ***Satz des Pythagoras*** im gelben Dreieck oben. Damit kann man die fehlende zweite Koordinate von A oder B auch berechnen:

Beispiel: $y_A = 0{,}4 \Rightarrow x_B = \sqrt{1 - {y_A}^2} = \sqrt{1 - 0{,}16} = \sqrt{0{,}84} \approx 0{,}9165$ usw.

Allgemeiner Fall: Punkte irgendwo auf dem Einheitskreis

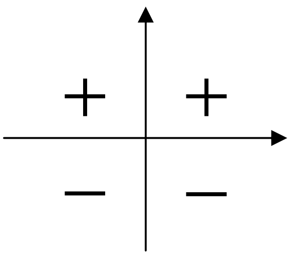


Man hat festgelegt, dass die Formeln

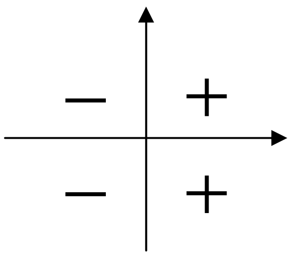
$\boxed{\sin\alpha = y_1 \quad \text{und} \quad \cos\alpha = x_1}$

für alle Punkte auf dem Einheitskreis gelten sollen. Damit können also die Koordinaten x und y auch negative Werte annehmen.
Beispiel: Im 2. Feld wird x negativ, im 3. Feld x und y, im 4. Feld y.

Mache dir bitte zuerst einmal klar, dass man damit folgende Vorzeichenregel erhält:



$\sin\alpha$



$\cos\alpha$

Das ist unglaublich wichtig. Denn wenn du die Information hast, dass für den Mittelpunktswinkel eines Punktes P gilt $\sin\alpha = -0{,}5$, dann muss es sofort klar sein, dass jetzt die y-Koordinate negativ ist, also muss P auf dem unteren Halbkreis liegen, d.h. α liegt zwischen 180° und 360°.
Ist dagegen $\cos\alpha < 0$, dann liegt P auf dem linken Halbkreis, $90^\circ < \alpha < 270^\circ$.

ACHTUNG: Aufgaben wie $\sin\alpha = 0{,}42$, $\sin\alpha = -0{,}6$, $\cos\alpha = 0{,}35$ oder $\cos\alpha = -0{,}75$ haben im Bereich $0^\circ \le \alpha < 360^\circ$ meist **zwei Lösungen**. Das Dumme daran ist nur, dass uns der Taschenrechner immer nur eine Lösung liefert. <u>Wir müssen also lernen, wie man die zweite Lösung findet.</u> (CAS-Rechner können da mehr, wenn man diese Aufgabe mit SOLVE als Gleichung lösen lässt.)

Hinweis: Es hilft vielen, wenn sie sich diese Winkel als **Drehwinkel** vorstellen. In obiger Abbildung dreht man beispielsweise P_O um den Winkel α_2 in die Position P_2.

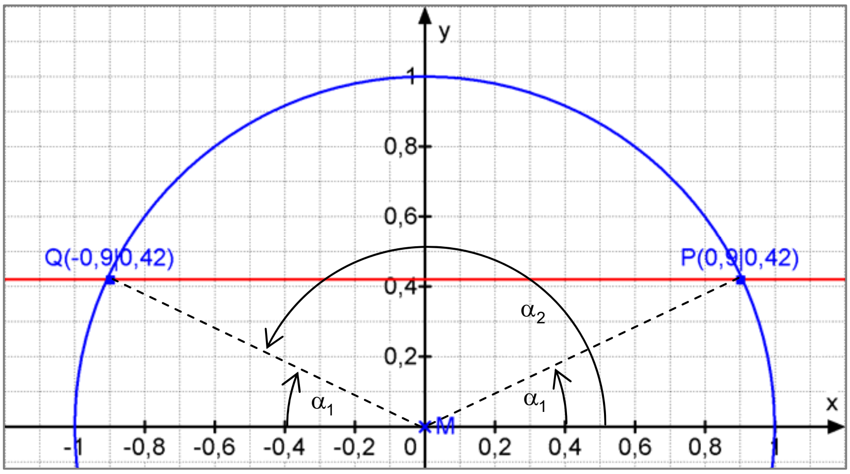
Wir müssen daher jetzt lernen, wie man die beiden Lösungen dieser einfachen trigonometrischen Gleichungen herausfindet. Dazu studiere bitte die nächsten 4 Grundaufgaben.

2. Einfachste trigonometrische Gleichungen im Gradmaß lösen

Grundaufgabe 1: **Für welche Winkel gilt $\sin\alpha = 0{,}42$?** (Es sei $0^\circ \le \alpha < 360^\circ$)

d. h. Welche Punkte des Einheitskreises hat also **$y = 0{,}42$?**

Eine Skizze hilft hier schnell weiter:



Die Gleichung **$y = 0{,}42$** stellt im x-y-Achsenkreuz eine Parallele zur x-Achse dar, diese den Einheitskreis in P und Q schneidet.

Man liest ab:

Zu P gehören $x_P \approx 0{,}9$

und α_1 im Bereich $0 < \alpha_1 < 90^\circ$.

Zu Q gehören $x_Q \approx -0{,}9$ sowie ein Mittelpunktswinkel α_2 im Bereich $90^\circ < \alpha_2 < 180^\circ$.

Berechnung dieser Winkel: Der TR liefert $\alpha_1 \approx 24{,}83^\circ$

Und dazu: $\alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1$. Der TR liefert dazu $\alpha_2 \approx 155{,}17^\circ$.

```
sin⁻¹ 0.42
             24.8345
180−Ans
             155.165
```

MERKE **$\sin\alpha > 0$ ergibt einen Winkel α_1 im 1. Feld und einen zweiten Winkel $\alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1$ im 2. Feld.**

Grundaufgabe 2: **Für welche Winkel gilt: $\cos\alpha = 0{,}35$?** (Es sei $0^\circ \le \alpha < 360^\circ$)

Diese Frage kann man auch so stellen: **Welche Punkte des Einheitskreises haben $x = 0{,}35$?**

Die Gleichung **$x = 0{,}35$** stellt im x-y-Achsenkreuz eine zur y-Achse parallele Gerade dar, die den Einheitskreis in P und Q schneidet.

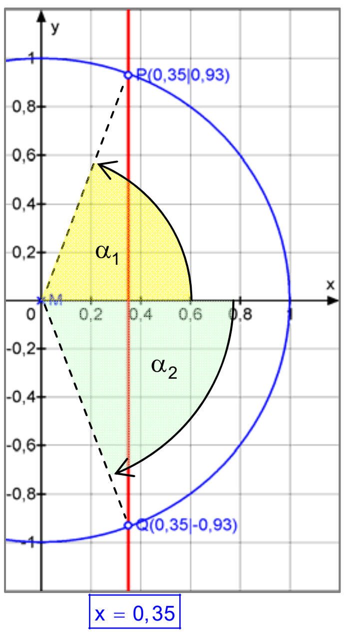
Zu P gehört $y_P \approx 0{,}93$ und α_1 im Bereich $0 < \alpha_1 < 90^\circ$.

Zu Q gehört $y_Q \approx -0{,}93$ sowie α_2 im Bereich $270^\circ < \alpha_2 < 360^\circ$.

Berechnung dieser Winkel: Der TR liefert $\alpha_1 \approx 69{,}51^\circ$

und daraus: $\alpha_2 = 360^\circ - \alpha_1 \approx 290{,}49^\circ$

```
cos⁻¹ 0.35
             69.5126
360−Ans
             290.487
```



MERKE **$\cos\alpha > 0$ ergibt einen Winkel α_1 im 1. Feld und einen zweiten Winkel $\alpha_2 = 360^\circ - \alpha_1$ im 4. Feld.**